

F. W. Bessel ja geodeesia

Tõnu Viik – Tartu Observatoorium ja Tartu Ülikool, e-post: viik@aai.ee



Kuulus matemaatik, astronoom ja geodeet Friedrich Wilhelm Bessel alustas oma geodeetilist uurimistööd siis, kui oli juba tõestatud, et Isaac Newtoni väide Maa lapikuse kohta on õige. Selle väite olid tõestanud Pierre Louis Moreau de Maupertuis ja Alexis Claude Clairaut poolt aastatel 1736–1737 tehtud meridiaanikaare geodeetilised mõõtmised Tornio ja Kittisvaara vahel [1]. Neid tulemusi kinnitasid Jöns Svanbergi tehtud sama kaare ülemõõtmised aastatel 1801–1803 [2]. Prantsuse Akadeemia oli aga asja käsile võtnud palju põhjalikumalt, sest teadlaste arvates tuli tingimata mõõta meridiaanikaari võimalikult erinevatel laiustel. Nii mõõtsidki lisaks Maupertuis'le ja Clairaut'le meridiaanikaart ka Charles-Marie La Condamine ja Pierre Bouguer Tarqui ja Cotchesqui vahel Peruu aastatel 1735–1743 [3]. Umbes samal ajal sai selgeks, et katsed kirjeldada Maad ideaalse ellipsoidina olid läbi kukkunud. See aga tähendas, et meridiaanide kõverus erinevatel laiustel polnud sugugi konstantne. Pikapeale jäid teadlased nõusse sellega, et Maa kuju pole üldse võimalik kirjeldada lihtsa matemaatilise valemiga. Aga ikkagi oli tarvis leida võimalikult täpsed parameetrid ellipsoidaalsele lähendile kui kõige lihtsamale ja loomulikult tuli teada saada, kui palju Maa kuju idaaalsest ellipsoidist erineb.

Seda ülesannet oli võimalik täita vaid meridiaanikaarte mõõtmisega ja samuti ka gravitatsioonikiirenduse mõõtmisega erinevatel Maa laiustel. Ja kuigi Bessel kulutas palju oma energiat nii ühe kui teise meetodi arendamiseks, vaatleme me praegu ainult kaaremõõtmise küsimusi.

Besseli ajal oli meridiaanikaare mõõtmist võimalik teha vaid triangulatsioonimeetodil.

Kõik Besseli teadustööd geodeesia alal koondas R. Engelmann oma 1876. a välja antud raamatu kolmandasse köitesse [4]. Enamik neist töödest olid algselt publitseeritud H. C. Schumacheri poolt asutatud ajakirjas *Astronomische Nachrichten* [5–12].

Geodeetiliste mõõtmiste teooria Besseli töödes

Besseli esimene geodeesia-alane töö on seotud Taani kaaremõõtmisega, mille korraldas Heinrich Christian Schumacher Holsteinis ja mida ta juhatas aastast 1817. Need uurimised olid vormistatud kirjadena Schumacherile, kes siis need hiljem oma ajakirjas *Astronomische Nachrichten* publitseeris. Bessel uuris, kuidas saaks asendada kolmnurki ellipsoidil kolmnurkadega keral. Kui see oleks võimalik, siis saaks antud täpsuse raamides kergesti asendada sfäärilised kolmnurgad omakorda tasapinnalistega, võttes arvesse, et kõiki sellise kolmnurga nurki tuleks vähendada sfäärilise ekstsessi ühe kolmandiku võrra [5].

Üleminek kolmnurkade mõõtmiselt ellipsoidi pinnal sfääriliste kolmnurkade mõõtmisele on komplitseeritud ka selle tõttu, et ellipsoidil moodustuvad kolmnurgad geodeetilistest joontest, s.t lühimatest kaht punkti ühendavatest joontest antud pinnal. Kuid mõõtmised loodide abil annavad meile nurgad Maa vertikaalsete lõigete vahel. Bessel oli esimene, kes taipas, et need kolmnurgad ei lange kokku geodeetiliste joonte poolt moodustatud kolmnurkadega ja ta töötas välja meetodi, kuidas üht kolmnurka teiseks transformeerida. Ta jõudis järeldusele, et selline transformatsioon on mõistliku täpsusega võimalik vaid selliste kolmnurkade puhul, mille külje pikkus on väiksem kui 150 km.

1826. a lahendas Bessel ühe geodeesiaalase põhiprobleemi – kuidas leida punkti *B* geograafilist laiust, kui me teame punkti *A* geograafilist laiust ja nurka, mille moodustavad meridiaan punktis *A* ja suund punktile *B* [6]. Gauss oli lahendanud selle probleemi oma pindade teooria abil, kuid see lahendus oli küllalt täpne vaid üsna lühikeste vahemaade puhul. Bessel leidis oma klassikalise – ja väga üldise – lahenduse trigonomeetria abil. Seda meetodit kasutati hiljem palju, sest Bessel oli koostanud ja publitseerinud ka vastavad tabelid, mida sai kasutada Maa mistahes ellipsoidaalse mudeli puhul.

Bessel andis ka *geoidi* definitsiooni, kuigi selle termini võttis kasutusele saksa matemaatik Johann Benedict Listing alles 1873. aastal. Bessel kirjutas 1837. aastal avaldatud töös: „Maa füüsikalise ja geomeetriaalase kuju vahel on suur vahe ... Kui ette kujutada, et Maakera on kanalite võrgustikuga kaetud, mis on meredega seotud ja seega veega täidetud, siis langeb rahuliku vee pind nendes kokku Maa geomeetriaalase pinnaga.“[8]. Tänapäeval me kirjeldame

geomeetrilise pinnaga.“[8]. Tänapäeval me kirjeldame geoidi pinda täpselt samal viisil.

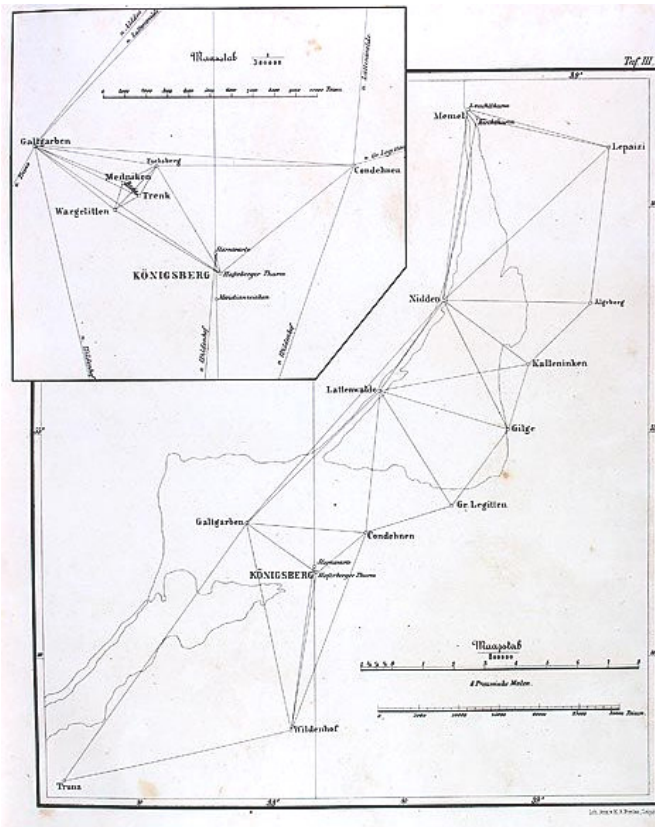
Bessel käsitles samuti nn üldist reduktsiooniprobleemi geodeesias. Ta uuris geoidi ja ellipsoidi erinevuste mõju astronoomiliste ja geodeetiliste mõõtmiste tulemustele. Ta näitas, et ükskõik kui väikesed need geoidi ja ellipsoidi vahed ka on, tuleb neid ikka arvesse võtta. Ta soovitas baaspunktidenä vaadelda mitte punkte endid, vaid nende normaalprojektsioonide asukohti ellipsoidi pinnal.

Geodeetilised mõõtmised praktikas

Besseli kõige olulisem panus praktilisse geodeesiasse oli kahtlemata kaaremõõtmine Preisimaal. Selle mõõtmise motiiviks oli plaan ühendada Venemaa ja Lääne-Euroopa triangulatsioonivõrgud nende teineteisele kõige lähemas piirkonnas Königsbergi lähedal. Venemaa valitsus saatis 1829. aastal Preisi valitsusele kirja sooviga, et Königsbergi ülikooli astronoomia ja matemaatika professor, observatoo-

riumi direktor Friedrich Wilhelm Bessel ühendaks need võrgud. Triangulatsiooni tööd Venemaa lõunaosas olid just käimas ja neid juhatas kindralmajor Carl Friedrich Tenner, kes mõnedel andmetel oli eesti päritolu [19]. Bessel sai kohe aru, et see mõõtmine annab suurepärase võimaluse täpsustada Maa kuju.

Selle ülesande täitmiseks pidi Bessel ehitama triangulatsioonivõrgu Preisimaa vastava võrgu kaguossa Trunz – Wildenhofi vahel ja kirdeossa Memel (praegu Leedu sadam Klaipeda) – Lepaizi vahel, mis oli juba Venemaa triangulatsiooni osa (joonis 1). Kaar, mida mõõta tuli, ühendas Trunzi (praegu Milejevo Poolas) majakaga Memelis, mis tegi kokku 196 km. Kolmnurkade kett ehitati Frisches Haffi lahe randa, siis läks see läbi Königsbergi ja Semlandi poolsaare ja lõpuks läbi Kurisches Haffi lahe [13] (siinkohal kasutame joonisest paremini arusaamiseks tolelaegseid kohanimesid).



Joonis 1. Triangulatsiooni skeem [4].

Kuna Bessel valis nende mõõtmiste baasjooneks vaid 935 toise'i ehk 1823 meetri pikkuse lõigu (1 toise = 1,949 m [16]), siis saame järeldada, et ta traditsioonidest suurt ei hoolinud. Kuni selle ajani oli geodeetide mantraks "mida pikem baasjoon, seda parem". Normaalseks loeti 10 km pikkust baasjoont, kuigi nii pika baasjoone võimalikult täpne mõõtmine polnud sugugi kerge. Bessel kirjutas selle kohta:

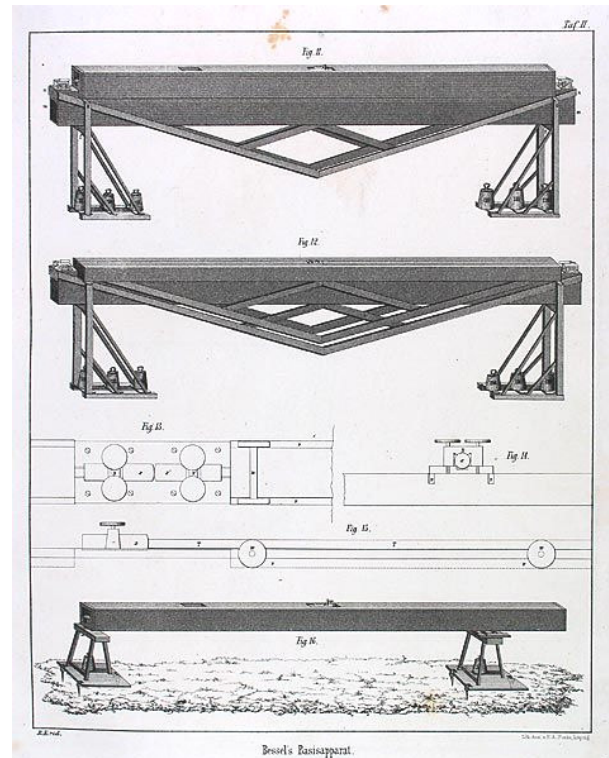
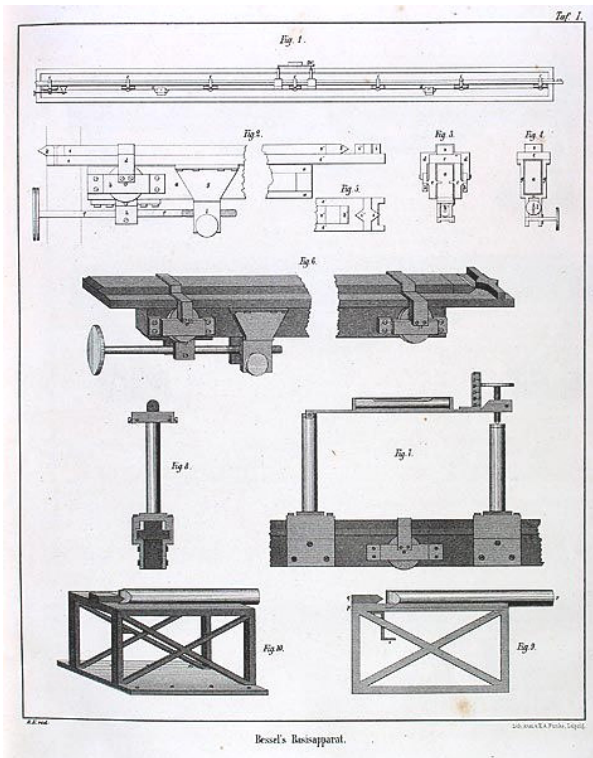
„Me ei kahtle, et nende abivahendite kaudu võime suurema täpsusega mõõdetud lühema (baas)joone oluliselt pikemaks mitmekordistada ja vaatleme baasjoone suuremat pikkust vähem märkimisväärseks kui selle lähedust mõõtelati kontrollaparaadile ja kui nõuet, et me võime baasjoone pikkuse hästidefineeritud ja mitmekülgsete tingimuste abil selle kontrolliks pakkuvat kolmnurkade süsteemi Galtgarben-Condehnen kolmnurga asukohale üle kanda.“

Vastavalt Besseli arusaamadele sobib sama mõõtmis-täpsuse saamiseks ka lühike baasjoon, kui me mõõdame nii kaugusi kui nurki eriti hoolikalt, kasutades parimaid võimalikke instrumente.

Baasjoon mõõdeti Trenki ja Mednikeni mõisate vahel viie päeva kestel 1834. aasta augustis. Mõõtmine algas väikesel kõrgendikul, siis tuli väike laskumine, läks üle karjamaade ja heinamaade muruse pinna. Kui läbitud oli 200 toise'i, jõuti põldudele ja heinamaadele, kuni baasjoon tõusis lõpp-punktini Mednikenis. 11. augusti õhtuks jõudis meeskond punktini A 226 toise'i kaugusel – ilmselt polnud meeskond kuigi kogenud. Järgmisel päeval mõõdeti baasjoon kuni Mednikenini ja pöörduiti uuesti Trenki tagasi ning korraldati mõõtmist. Kuna Bessel polnud tulemusega rahul, siis mõõdeti kaugus Trenki ja punkti A vahel veelkord. Pärast hoolsaid rehkendusi saadi merepinnani taandatud baasjoone pikkuseks 934,993124 toise'i.

Bessel oli väga hoolikas ka baasjoone lõpp-punktide fikseerimisel. Viie jala sügavuses augus (1 Preisi jalg = 31,385 cm) kivisel alusel paiknes graniitrahn, mille pealispinna sisse oli kinnitatud vasest silinder. Rist selle silindri otsas märkis joone lõpp-punkti. Maapinna kohal oli see punkt märgitud tellistest tehtud sambaga, mille peale Bessel paigutas liivakivist kuubi Selle kuubi sisse paigutas Bessel jälle vasest silindri, mis ulatus kuubist pool tolli välja. Silinder oli piki telge läbi puuritud, nii sai loodi asendi täpselt fikseerida. Bessel mõõtis baasjoone pikkused enda-

konstrueeritud instrumendiga. See koosnes neljast vardast, igaüks umbes 2 toise'i pikk, 12 liini (ligne) lai ja 3 liini paks (1 ligne = 2,256 mm [18]). Vardad olid tehtud kahes osas – üks rauast ja teine tsingist, kusjuures tsingist osa oli kaks korda kitsam kui rauast osa. Need osad olid paigutatud teineteise peale ja ühest otspunktist jäigalt kinnitatud. Kahe metalli kombinatsioon lubas varda soojuspaisumist arvesse võtta ilma temperatuuri mõõtmata. Vardad olid paigutatud puust kastidesse, et vältida nende sattumist otsese päikesekiirguse ja niiskuse mõju kätte. Vardad asetati baasjoonele nii, et nende otsad kokku ei puutunud, kusjuures iga varras toetus seitsmes punktis rattakestele. Vahe varraste vahele jäeti meelega, sest nii minimeeriti juhuslike nihete mõju. Varrastevahelist kaugust mõõdeti klaasist kiiluga, mida sai varda otsast kruvi abil välja nihutada (nn Besseli kiilud). Vardad paigutati baasjoone sihis spetsiaalsetele paksudest tammepalkudest platvormile ja varraste asetust kontrolliti loodide ja passaažinstrumendiga, st astronoomiliselt. Bessel pööras suurt tähelepanu sellele, et hoolikalt võrrelda oma instrumendi pikkust de Pérou standardtoise'iga Pariisis. Siinkohal tuleb märkida, et 1839. aastal viidi Preisimaal sisse uus pikkuse standard – kolm Preisi jalga. Selle etalooni töötas välja Bessel ja see põhines Besseli teoorial ja katsetel pendliga [14]. Võrdlusprotsessis paigutas Bessel oma vardad vette, et tagada homogeenset temperatuurijaotust ja sel viisil usutavalt hinnata temperatuuri mõju varrastele.



Joonis 2. Besseli mõõtevarraste skeemid [4].

Besseli instrument oli nii edukas, et seda kasutasid geodeedid kuni 20. sajandi alguseni. Tuleb märkida, et selle tööga seoses lahendas Bessel kahes punktis toetatud varda väikseima läbivajumise probleemi [15].

Kuna mõõdetav kaar oli 40-kraadise nurga all meridiaaniga, siis tuli kaare mõnedes punktides määrata nii geograafiline laius kui pikkus. Bessel vältis pikkuse mõõtmist vastavate asimuutide mõõtmise abil, kuna pikkuse mõõtmised polnud tollal küllalt täpsed.

Nurgamõõtmisteks kasutas Bessel transiitriista, mille oli teinud Ertel Münchenis Schumacheri jooniste järgi. Horizontaalse limbi diameeter oli 38 cm ja vertikaalsel 19 cm. Asimuuti sai lugeda kahe kaaresekundi täpsusega.

Besseli põhilisteks abilisteks olid major Johann Jacob Baeyer Preisimaa kindralstaabist (hiljem sai Baeyer kindrali aukraadi) ja leitnant Kuhlenkamp – võib-olla selle Breemeni kaubandusfirma omaniku sugulane, kus Bessel oma iseisvat elu oli alustanud.

Kaugete objektide vaatlemiseks kasutas Bessel poleeritud vasest umbes 21 cm diameetriga poolkera, mis oli kaetud hõbedaga ja paigutatud liivakivist kuubist väljaulatavale silindriile. Päikesepaistelisel päeval nägi poolkeralt peegeldunud valgust 10 km kauguselt, kui vaatlusi tehti 15-tollise teodoliidiga. Kui aga ilm oli pilves, siis kasutati 2 x 2 jalast valgeks värvitud ruutu, mille keskele värviti 10-tollise läbimõõduga must joon. Pikematel kaugustel – 40 kuni 50 km – kasutati Gaussi heliotroopi.

Geodeetiliste mõõtmiste tulemusi kontrolliti astronoomiliste vaatluste abil, selleks et määrata geograafilised laiused ja pikkused mõnedes punktides. See probleem lahendati kantava passaažinstrumendiga. Siinkohal kasutas Bessel enda meetodit, mis hoidis ära instrumentaalsed vead laiuste määramisel selle instrumendiga. Sama meetodit kasutas ka kindral Tenner Venemaal.

Tegelikud tööd Venemaa ja Preisimaa geodeetiliste võrkude ühendamiseks pidid algama 1831. aastal. Kuid vaevalt said Bessel ja Baeyer alustada ettavalmistavaid vaatlusi, kui Preisimaal puhkes katkuepideemia, üks hullemaid maa ajaloos. Bessel ja Baeyer said alustada oma tööd alles 1832. aastal.

Pärast tulemuste detailset kontrolli mõlemad võrgud ühendati ja tulemused publitseeriti raamatus [13].

Besseli ellipsoid

Üks Besseli suurimatest saavutustest geodeesia alal oli kahtlemata Maa kuju uue matemaatilise mudeli defineerimine. Tänapäeval tunneme seda Besseli ellipsoidi nime all. Selle mudeli defineerimisel kasutas ta oma kaaremõõtmisi, mis katsid vaid 1°30'28",980. Lisaks kasutas ta üheksa mullal tehtud mõõtmise tulemusi, nimelt Peruu kaart (3°7'3",455), esimest Ida-India oma (1°34'56",428), teist Ida-India mõõtmist (15°15'40",728), Prantsuse (12°22'12",74), Inglise (2°50'23",497), Hannoveri (2°0'57",42), Taani (1°31'53",306), Venemaa (8°2'28",907) ja Rootsi (1°37'19",565) omi. Kõiki mõõtmisi summeerides sai ta peaaegu 50 kraadise kaare. Astronoomilisi punkte oli 38. Bessel nägi oma ülesandena sellise ellipsoidi leidmist,

mille pinna kaugused Maa tegelikust pinnast oleksid nii väikesed kui võimalik. Samal ajal planeeris ta orienteerida ellipsoidi teljed nii, et kõik kaaremõõtmised oleksid parimal viisil arvestatud.

1837. aastal avaldas Bessel artikli, kus ta esitas oma tulemused Maa kuju määramisel: Maa polaarse ja ekvatoriaalse raadiuse, lapikuse, meridiaani ja laiuse ühe kraadi analüütilise avaldise laiuse funktsioonina [9]. Ta andis samuti meridiaani kõveruse ja kaugused Maa keskpunktist (võib-olla on huvitav märkida, et oma artiklite autorina ajakirjas *Astronomische Nachrichten* märkis ta alguses ennast kui Härra Professor ja Rüütel Bessel ja hiljem Härra Salanõunik ja Rüütel Bessel!).

Õnnetul kombel juhtus selline asi, et neli aastat pärast selle artikli publitseerimist teatas Pariisi Akadeemia olulisest veast oma arvutustes – nad olid kasutanud vale "Berechnungsart'i" kauguste leidmisel Montjoux ja Mola vahel Formentera saarel, mis tähendas viga umbes 70 toise'i (136,5 m). Louis Puissant tõi selle vea Prantsuse Akadeemia ette ja akadeemia reageeris sellele nii, et laskis neid rehkendusi korrata neljal sõltumatul isikul, kelleks olid Largeteau, Daussy, Mathieu ja Puissant. Nende meeste arvutuste tulemused langesid kokku umbes 5–6 toise'iste erinevustega. Kuid Bessel kontrollis ikkagi kõiki neid prantslaste rehkendusi ja alles pärast seda, kui ta leidis, et tema tulemused kattuvad päris hästi prantslaste tulemustega, tegi ta kõik oma arvutused uuesti ja avaldas tulemused 1841. aastal [12]. Lapikuse väärtuseks sai ta 1/299,153.

Besseli ellipsoid oli kasutusel peaaegu 100 aastat erinevates riikides üle maailma. Isegi Struve kaaremõõtmise lõpptulemused anti Besseli ellipsoidi alusel [17]. Alles pärast 100 aasta möödumist oli saadud küllalt palju uusi andmeid Maa kuju täpsemaks esituseks ja praeguseks kasutatakse lapikuse väärtusena tulemust 1/298,257 ([16], *International Earth Rotation and Reference Systems Service*, 1989), nii et Besseli viga oli siin vaid 0,3%, kuna Struve viga oli 1,2%!

Kokkuvõte

Lisaks sellele, et Bessel oli väljapaistev astronoom ja matemaatik, oli ta ka veel suurepärase geodeet. Tema poolt välja töötatud vaatluste korraldamise printsiipi ja nii isiklike kui ka instrumentaalvigade teooriat kasutati ja kasutatakse praegugi nii astronoomias kui geodeesias. Tema töödes sai astronoomia ja geodeesia matemaatiline aparaat tõhusa panuse edasiarenguks. Ja ikkagi võime me Maa täpse kuju määramist pidada Friedrich Wilhelm Besseli kõige suuremaks saavutuseks geodeesias.

Tänuavaldused

Ma olen väga tänulik Hans-Fredrik Wennströmile Lantmäterietist, kes saatis mulle Eric Tobé raamatu, mille kaudu ma tutvusin Maupertuis' kraadimõõtmistega; Aili Bernotasele Tartu Ülikooli Raamatukogust, kes aitas mul Engelmanni raamatut kätte saada Freiburgist ja kolleeg Jaan Pelt'ile Tartu Observatooriumist, kes abistas mind illustatsioonide ettevalmistamisel.

Viited

1. Tobé, E., Fransysk visit i Tornedalen 1736–1737 (En bok om en gradmätningsexpedition och dess nyckelpersoner), Tornedalica, 1986.
2. Smith, J. R., The Struve Geodetic Arc, http://www.fig.net/hsm/struve/struve_arc_smith_2005.pdf.
3. Smith, J. R., The Meridian Arc Measurement in Peru 1735–1745, FIG XXII International Congress, Washington, D.C USA, April 19–26, 2002.
4. Engelmann, Verlag von Wilhelm, Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel. Herausgegeben von Rudolf Engelmann, Dritter Band, Leipzig, 1876.
5. Bessel, F. W., Berechnung eines Dreiecks, dessen Seiten geodätische Linien sind. *Astronomische Nachrichten*, vol 1, p 85, 1823.
6. Bessel, F. W. Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen. *Astronomische Nachrichten*, vol 4, p 241, 1825.
7. Bessel, F. W., Bessel's Methode der Berechnung geodätischer Vermessungen. *Astronomische Nachrichten*, vol 6, p 1, 1828.
8. Bessel, F. W., Über den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen. *Astronomische Nachrichten*, vol 14, p 269, 1837.
9. Bessel, F. W., Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationssphäroids. *Astronomische Nachrichten*, vol 14, p 333, 1837.
10. Bessel, F. W., Neue Berechnung der Beobachtungen der Polhöhen, auf welchen die zweite in Indien ausgeführte Gradmessung beruhet. *Astronomische Nachrichten*, vol 14, p 349, 1837.
11. Bessel, F. W., Über die Polhöhen, welche der Englischen Gradmessung zum Grunde liegen. *Astronomische Nachrichten*, vol 14, p 381, 1837.
12. Bessel, F. W., Über einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seiner Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde, *Astronomische Nachrichten*, Bd 19, n 438, s 97, 1841.
13. Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten. Ausgeführt von Bessel und Baeyer, in Commission bei F. Dummler, Berlin, 1838.
14. Bessel, F. W. Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels. *Abhandlungen der Berliner Akademie d. Wiss., Math. Cl.*, p 1, 1826.
15. Bessel, F. W., Einfluss der Schwere auf die Figur eines, auf zwei Punkten von gleicher Höhe aufliegenden Stabes. Darstellung der Untersuchungen und Maassregeln über die Einheit des Preussischen Längenmaasses. Beilage I, Berlin, 1839.
16. http://en.wikipedia.org/wiki/Figure_of_the_Earth.
17. Лавринович, К. К., Фридрих Вильгельм Бессель, Москва, "Hayka", 1989, 320 стр.
18. <http://www.sizes.com/units/toise.htm>
19. Traat, A., Kas C. F. Tenner oli Eesti päritolu?, *Eesti Loodus*, lk 513, nr 8, 1983.

Artikkel põhineb autori ettekandel, mis toimus 2006. aasta augustis rahvusvahelisel konverentsil "Struve kaar ja selle avarus ruumis ja ajas", Haparanda ja Pajala (Rootsi).